AIIH IAHR

VI CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRAULICA

CONSIDERAÇÕES SOBRE A SOLUÇÃO LINEARIZADA DAS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT COM INFLUXO LATERAL

Jerson Kelman
Professor Assistente
COPPE-Univ. Federal do Rio de Janeiro, Brasil

Rafael G. Quimpo
Associate Professor of Civil Engineering
Univ. of Pittsburgh, Pa., U.S.A.

Resumo

É apresentada uma tentativa de solução para as equações de escoamento a superfície livre baseada em várias hipóteses simplificadoras entre quais se destacam:

a) as grandezas hidraúlicas são supostas "flutuando" ligeiramente em torno de grandezas de referencias possibilitando assim a linearização do sistema
b) é suposto um influxo nulo de montante
c) é suposto um influxo lateral unitário de duração λ.

A implantação da "solução" encontrada trouxe dificuldades quanto a convergencia. É feito um estudo que mostra que a responsábilidade pela falta de convergencia cabe ao excesso de hipóteses simplificadoras e não a problemas de ordem computacional.

Abstract

Using a unit step lateral inflow of duration λ and zero upstream contribution, the Saint-Venant equations of free-surface flow are solved using a linearization technique.

It is suggested that problems of convergence when applying the solution are due to an inconsistency which results from the simplifying hypotheses adopted to permit a closed-form solution.

Introdução

As equações de Saint-Venant para escoamento a superfície livre são:

$$\frac{\partial q^*}{\partial x} + \frac{\partial y^*}{\partial t} = L \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + g \frac{\partial y^*}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{u^*}{y^*} L \qquad (2)$$

onde

$L = L(x,t)$ = vazão lateral por unidade de comprimento do canal

$y^* = y^*(x,t)$ = profundidade

$u^* = u^*(x,t)$ = velocidade de escoamento

$q^* = q^*(x,t)$ = vazão por unidade de largura do canal

x = posição

t = tempo

g = aceleração da gravidade

S_0 = declividade do fundo do canal

S_f = declividade da linha energética

Como se sabe, as equações acima não são de simples solução. Frequentemente alguns termos são omitidos, permitindo soluções mais fáceis como por exemplo a abordagem de onda cinemática. Outras vezes conservam-se todos os termos e utiliza-se um tratamento numérico. Esta ultima alternativa, apesar de apresentar respostas satisfatórias a maior parte das configurações de escoamento, ressente-se de uma contribução a um entendimento mais profundo dos fenomenos envolvidos. Solucões analiticas ainda são portanto altamente desejáveis.

Uma alternativa no trato das equações de Saint-Venant foi apresentada por Deymie há mais de vinte e cinco anos: trata-se da solução linear completa. Ou seja, através de um artificio, as equações são linearizadas e oferecem assim uma relativamente simples solução.

Recentemente um grupo da Universidade da Irlanda liderado pelo Prof. Dooge, pesquizou em mais profundidade as soluções linearizadas. Merece destaque o trabalho de Harley e Dooge (1) onde o escoamento foi idealizado como resposta a um influxo de montante igual a função Delta de Dirac e com ausencia de influxo lateral. Uma outra tese, desenvolvida por O'Meara resolveu o problema do influxo lateral, tambem iqual a função Delta de Dirac e com ausencia de escoamento de montante.

A adaptação dos estudos de Harley e de O'Meara com objetivo de fornecer um instrumento teórico para o Modelo de Simulação Hidrológica que estava sendo desenvolvido no MIT, foi feito por Bravo e pelo próprio Harley. O apelo da abordagem linear reside no fato de permitir convolução de diversos influxos com a resposta a um influxo simples, anàlogamente à abordagem de hidrograma unitário. Bravo não encontrou dificuldades em implantar o sistema para o caso de escoamento de montante (2). Entretanto, viu-se frente a instabilidades numéricas para o caso de escoamento lateral. A alternativa encontrada foi a de utilizar uma solução approximada e concluiu-se pela necessidade de maiores pesquisas para a solução deste problema.

A solução para o caso de influxo lateral finito encontra-sa no apêndice. As hipóteses assumidas são:

(i) Vale a equação de Chezy: $S_f = q*^2 / C^2 y*^3$ onde C = coef. de Chezy.

(ii) É suposto que as grandezas tem variação no tempo como no espaço de tal forma que $\frac{\partial m}{\partial K} \cdot \frac{\partial n}{\partial l} \cong 0$ onde <u>m</u> e <u>n</u> podem ser substituidos por <u>q</u>* ou <u>y</u>* e <u>K</u> e <u>l</u> por <u>t</u> ou <u>x</u>.

(iii) Linearização:

$q*(x,t) = Q(x) + q(x,t)$

$y*(x,t) = Y(x) + y(x,t)$

onde Q(x) e Y(x) são grandezas de referencia e q(x,t) e y(x,t) são pequenas perturbações.

(iv) Condições de fronteira impostas

(a) $\frac{\partial L(x,t)}{\partial x} = 0$

(b) $L(t) = u(t) - u(t-\lambda)$

(c) $q(x,0) = 0$

(d) $\frac{\partial q(x,0)}{\partial t} = 0$

(e) $q(0,t) = 0$

(v) O escoamento é subcrítico.

A solução como aparece na eq. (A42) é

$$q(x,t) = F_2(t)\,u(t) - F_2(t-\lambda)u(t-\lambda) - \int_0^t F_2(t-\alpha)u(t-\alpha)F_1(\alpha)\,d\alpha + \int_0^{t-\lambda} F_2(t-\lambda-\alpha)u(t-\lambda-\alpha)F_1(\alpha)\,d\alpha \qquad (3)$$

onde

$$F_1(x,t) = \exp\left\{\frac{1.5xS_0}{Y(1-Fr^2)} - \frac{Q}{Y^2}\left[1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right](t+AFr)\right\}\cdot \left\{\frac{AB}{\sqrt{(t+AFr)^2-A^2}}\, I_1\left[B\sqrt{(t+AFr)^2-A^2}\right]u(t-A+AFr) + \delta(t-A+AFr)\right\} \qquad (4)$$

$\delta(t)$ = função Delta de Dirac

I_1 = função modificada de Bessel de 1º espécie e de 1º ordem

$$A = \frac{xQ}{gY^2Fr(1-Fr^2)} \qquad (5)$$

$$B = \left\{(1-Fr^2)Q^2\left[(1-Fr^2)S_f^2 + 3S_0S_fFr^2 - 2.25S_0^2Fr^2\right]/Y^4Fr^4\right\}^{1/2} \qquad (6)$$

$$F_2(t) = \frac{3S_0Y^4C^4}{4gQ^2}\left[\exp\left(\frac{-2gQt}{Y^2C^2}\right) - 1 + \left(\frac{2gQt}{Y^2C^2}\right)\right] \qquad (7)$$

Análise

A tentativa de implantar a solução expressa em (3) em uma programa de computador trouxe grandes instabilidades. A princípio pensou-se que a dificuldade residia no aspeto computacional e numérico do problema. Entretanto, após uma cuidadosa revista destas possibilidades foi constatado que a insolvencia deveria ter causas mais profundas. Em vista disto procedeu-se a uma analise mais criteriosa da "solução" expressa em (3).

Por conveniencia seja definido

$$F_3(x,t) = \exp\left\{\frac{-Qt}{Y^2}\left[1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right]\right\} \cdot \frac{AB}{\sqrt{(t+AFr)^2-A^2}}\, I_1\left(B\sqrt{(t+AFr)^2-A^2}\right) \tag{8}$$

De (3), (4) e (8)

$$\begin{aligned} q(x,t) = {} & F_2(t)u(t) - F_2(t-\lambda)u(t-\lambda) - \exp\left\{\frac{1.5xS_0}{Y(1-Fr^2)} - \frac{QAFr}{Y^2}\left[1.5S_0 - \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right]\right\} \\ & \left\{\int_0^t F_2(t-\alpha)F_3(\alpha)u(\alpha-A+AFr)\,d\alpha - \int_0^{t-\lambda} F_2(t-\lambda-\alpha)F_3(\alpha)u(\alpha-A+AFr)\,d\alpha \right. \\ & + F_2(t-A+AFr)u(t-A+AFr)\exp\left[\frac{-QA(1-Fr)}{Y^2}\left(1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right)\right] \\ & + F_2(t-\lambda-A+AFr)u(t-\lambda-A+AFr) \cdot \\ & \left. \exp\left[\frac{-QA(1-Fr)}{Y^2}\left(1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

Uma das condições que a função expressa em (9) tem que satisfazer é

$$\lim_{t\to\infty} q(x,t) = 0$$

De (7) verifica-se que para $t \gg 0$, $F_2(t)$ tem comportamento linear. Ou seja

$$\begin{aligned} & F_2(t-A+AFr)u(t-A+AFr) - F_2(t-\lambda-A+AFr)u(t-\lambda-A+AFr) \\ & = F_2(t)u(t) - F_2(t-\lambda)\,u(t-\lambda) = \psi\ (\text{constant}) \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

e

$$\int_0^t F_2(t-\alpha)F_3(\alpha)\,u(\alpha-A+AFr)\,d\alpha - \int_0^{t-\lambda} F_2(t-\lambda-\alpha)F_3(\alpha)\,u(\alpha-A+AFr)\,d\alpha = \xi(x,t) \geq 0 \qquad (11)$$

De (9), (10) e (11)

$$q(x,t) = \left\{1 - \exp\left[\frac{1.5xS_0}{Y(1-Fr^2)} - \frac{QA}{Y^2}\left(1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right)\right]\right\}\psi$$

$$+ \exp\left[\frac{1.5xS_0}{Y(1-Fr^2)} - \frac{QAFr}{Y^2}\left(1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right)\right]\xi(x,t)$$

Como

$$\exp\left[\frac{1.5xS_0}{Y\cdot(1-Fr^2)} - \frac{QAFr}{Y^2}\left(1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right)\right]\xi(x,t) \geq 0$$

para $t \gg 0$

$$\left\{1 - \exp\left[\frac{1.5xS_0}{Y(1-Fr^2)} - \frac{QA}{Y^2}\left(1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right)\right]\right\}\psi \leq 0$$

ou seja

$$\exp\left[\frac{1.5xS_0}{Y(1-Fr^2)} - \frac{QA}{Y^2}\left(1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right)\right] \geq 1 \qquad (12)$$

De (5) e (12)

$$\frac{1.5xS_0}{Y(1-Fr^2)} - \frac{xFr}{Y(1-Fr^2)}\left[1.5S_0 + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right] \geq 0 \qquad (13)$$

Para $t \gg 0$ parece razoável assumir que as condições de unformidade são restauradas e que portanto $S_f = S_o$. Com esta suposição (13) pode ser reescrito como:

$$1.5(1-Fr) - \frac{(1-Fr)}{Fr} \geq 0$$

ou

$$Fr^2 - 3Fr + 2 \leq 0 \qquad (14)$$

Esta inequação vale quando $Fr \in [1,\ 2]$. Mas uma das hipóteses assumidas é que o escoamento é subcrítico, isto é $Fr \in [0,\ 1]$. Esta contradição demonstra que de fato q(x,t) expresso em (3) não pode convergir. É interessante observar que or referido programa de computador apresentou alguma estabilidade para a condição de escoamento crítico.

Conclusão

Foi verificado que a falta de convergencia para a hidrógrafa expressa em (3) deve-se àlguma impropriedade intrínsica de derivação e não a dificuldades de ordem computacional, como a princípio se pensou. A abordagem peca pelo excesso de hipóteses simplificadoras.

Agradecimentos

Os autores agradecem a COPPE-UFRJ, onde este trabalho foi inicialmente desenvolvido, pelas facilidades concedidas. Este estudo foi parcialmente financiado pelo "U. S. National Science Foundation under Research Grant No. GK-20388".

Referencias

1) Dooge, J. C. I., Harley, B. M., "Linear Routing in Uniform Open Channels", Proceedings of the International Hydrology Symposium, Fort Collins, Colo. (Setembro de 1967).

2) Bravo, C. A., Harley, B. M., Perkins, F. E., Eagleson, P. S., "A Linear Distributed Model of Catchment Runoff", Report No. 123, Hydrodynamics Lab., MIT, Cambridge, Mass, (Junho de 1970).

Apêndice

As equações de Saint-Venant para escoamento a superficie livre são:

$$\frac{\partial q^*}{\partial x} + \frac{\partial y^*}{\partial t} = L \tag{A1}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x} + g\frac{\partial y^*}{\partial x} = g(S_o - S_f) - \frac{u^*}{y^*}L \tag{A2}$$

Por definição $q^* = u^*y^*$ (A3)

Para escoamento uniformes vale a expressao de Chezy para perda de carga

$$S_f = \frac{q^{*2}}{C^2 y^{*3}} \tag{A4}$$

De (A2) e (A3)

$$\frac{1}{y^*}\frac{\partial q^*}{\partial t} - \frac{q^*}{y^{*2}}\frac{\partial y^*}{\partial t} + \frac{q^*}{y^{*2}}\frac{\partial q^*}{\partial x} - \frac{q^{*2}}{y^{*3}}\frac{\partial y^*}{\partial x} + g\frac{\partial y^*}{\partial x} = g(S_o - S_f) - \frac{q^*L}{y^{*2}} \tag{A5}$$

De (A1), (A4) e (A5)

$$(gy^{*3} - q^{*2})\frac{\partial y^*}{\partial x} + 2q^*y^*\frac{\partial q^*}{\partial x} + y^{*2}\frac{\partial q^*}{\partial t} = gy^{*3}S_o - \frac{gq^{*2}}{C^2} \tag{A6}$$

Nesta etapa o objetivo é eliminar o termo $\frac{\partial y^*}{\partial x}$ e para isto convém, como se verá adiante, diferenciar (A6) em relação a t e desprezar os produtos dos termos diferenciais. Isto significa que é suposto que as grandezas tem variação "suave" tanto no tempo como no espaço

$$(gy^{*3} - q^{*2})\frac{\partial^2 y^*}{\partial x\partial t} + 2q^*y^*\frac{\partial^2 q^*}{\partial x\partial t} + y^{*2}\frac{\partial^2 q^*}{\partial t^2} = 3gy^{*2}S_o\frac{\partial y^*}{\partial t} - \frac{2gq^*}{C^2}\frac{\partial q^*}{\partial t} \tag{A7}$$

De (A1) e (A7)

$$(gy^{*3} - q^{*2})\frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2} - 2q^*y^*\frac{\partial^2 q^*}{\partial x\partial t} - y^{*2}\frac{\partial^2 q^*}{\partial t^2} - 3gy^{*2}S_o\frac{\partial q^*}{\partial x}$$

$$- \frac{2gq^*}{C^2}\frac{\partial q^*}{\partial t} = (gy^{*3} - q^{*2})\frac{\partial L}{\partial x} - 3gy^{*2}S_oL \tag{A8}$$

Com intuito de linearizar (A8), seja

$$q^*(x,t) = Q(x) + q(x,t) \tag{A9}$$

$$y^*(x,t) = Y(x) + y(x,t) \tag{A10}$$

onde $Q(x)$ e $Y(x)$ são grandezas de referencias e $q(x,t)$ e $y(x,t)$ são pequenas perturbações. De (A8), (A9) e (A10)

$$(gY^3 - Q^2)\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - 2QY\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} - Y^2\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - 3gY^2 S_0 \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$- \frac{2gQ}{C^2}\frac{\partial q}{\partial t} = (gY^3 - Q^2)\frac{\partial L}{\partial x} - 3gY^2 S_0 L$$

Mas $gY^3 - Q^2 = gY^3(1 - Fr^2)$

onde Fr = Nº de Froude. De (A11) e (A12)

$$(1-Fr^2)gY^3\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - 2QY\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} - Y^2\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - 3gY^2\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$- \frac{2gQ}{C^2}\frac{\partial q}{\partial t} = (1-Fr^2)gY^3\frac{\partial L}{\partial x} - 3gY^2 S_0 L$$

Com intuito de simplificar a notação. sejam definidas as seguintes variáveis auxiliares:

$D = gY$

$E = 2QY$

$F = 3S_o$

$G = 2gQ/C^2$

(A13) pode ser reescrito

$$(1-Fr^2)DY^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - E\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} - Y^2\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - DFY\frac{\partial q}{\partial x} - G\frac{\partial q}{\partial t} = (1-Fr^2)DY^2\frac{\partial L}{\partial x} - DFYL$$

As condições de fronteira impostas para a solução de (A18) serão:

$$\frac{\partial L(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$L(t) = u(t) - u(t - \lambda)$$

$$q(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial q(x,0)}{\partial t} = 0$$

$$q(0,t) = 0$$

De (A18), (A19) e (A20)

$$(1-Fr^2)DY^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - E\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} - Y^2\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - DFY\frac{\partial q}{\partial x} - G\frac{\partial q}{\partial t} = DFY[u(t) - u(t-\lambda)]$$

Definindo-se $\bar{q}(x,s)$ como a Transformada de Laplace de $q(x,t)$, isto é

$$\bar{q}(x,s) = \int_0^\infty \exp(-st)\, q(x,t)\, dt$$

Applicando a transformada em (A24)

$$(1-F_r^2)DY^2\frac{\partial^2\bar{q}}{\partial x^2}-Es\frac{\partial\bar{q}}{\partial x}+E\frac{\partial}{\partial x}q(x,0)-Y^2s^2\bar{q}+Y^2s\,q(x,0)+Y^2\frac{\partial}{\partial t}q(x,0)$$

$$-DFY\frac{\partial\bar{q}}{\partial x}-Gs\bar{q}+Gq(x,0)=-DFY\left[\frac{1-\exp(-\lambda s)}{s}\right]$$ (

De (A21), (A22) e (A25)

$$(1-F_r^2)DY^2\frac{\partial^2\bar{q}}{\partial x^2}-(Es+DFY)\frac{\partial\bar{q}}{\partial x}-(Y^2s^2+Gs)\bar{q}=-DFY\left[\frac{1-\exp(-\lambda s)}{s}\right]$$ (A

Seja uma nova variável definida por

$$q'(x,s)=\bar{q}(x,s)-\frac{DFY}{Y^2s^2+Gs}\left[\frac{1-\exp(-\lambda s)}{s}\right]$$ (A

De (A26) e (A27)

$$(1-F_r^2)DY^2\frac{\partial^2 q'}{\partial x^2}-(Es+DFY)\frac{\partial q'}{\partial x}-(Y^2s^2+Gs)q'=0$$ (A

Tratando a variável de transformação s como uma constante (em x), a solução d

(A28) será da forma

$$q'=K\exp(rx)$$ (A

onde

$$r=\frac{(Es+DFY)-\sqrt{(Es+DFY)^2+4(1-F_r^2)DY^2(Y^2s^2+Gs)}}{2(1-F_r^2)DY^2}$$ (A

De (A27) e (A30)

$$\bar{q}(x,s)=K\exp(rx)+\frac{DFY}{Y^2s^2+Gs}\left[\frac{1-\exp(-\lambda s)}{s}\right]$$ (A3

Logo

$$\bar{q}(x,s)=\frac{DFY\left[1-\exp(-\lambda s)\right]}{s(Y^2s^2+Gs)}\left[1-\exp(rx)\right]$$ (A3

Adote-se a convenção de que

$$f(x,s)=\mathcal{L}\left[F(x,t)\right]$$

Seja definido

$$f_0(s)=\exp\left[\frac{-x\sqrt{(Es+DFY)^2+4(1-F_r^2)DY^2(Y^2s^2+Gs)}}{2(1-F_r^2)DY^2}\right]$$

ou seja

$$f_o(s) = \exp\left\{\frac{-x\sqrt{[E^2+4(1-Fr^2)DY^4]s^2+[2DEFY+4(1-Fr^2)DGY^2]s+D^2F^2Y^2}}{2(1-Fr^2)DY^2}\right\}$$ (A

Seja definida a variavel auxiliar

$$H = \frac{2DEFY + 4(1-Fr^2)DGY^2}{2[E^2+4(1-Fr^2)DY^4]} = \frac{Q^2}{Y^2}\left[1.5S_o + \frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right]$$ (A

Logo

$$f_o(s-H) = \exp\left\{\frac{-x\sqrt{E^2+4(1-Fr^2)DY^4}}{2(1-Fr^2)DY^2}\cdot\sqrt{s^2-\left[H^2-\frac{D^2F^2Y^2}{E^2+4(1-Fr^2)DY^4}\right]}\right\}$$ (A

Seja definida a variável auxiliar

$$B^2 = H^2 - \frac{D^2F^2Y^2}{E^2+4(1-Fr^2)DY^4} = \frac{(1-Fr^2)Q^2}{Fr^4Y^4}\left[(1-Fr^2)S_f^2+3S_oS_fFr^2-\frac{9}{4}S_o^2Fr^2\right]$$ (A

Obviamente B^2 e uma grandeza positiva. Portanto os valores de S_f e Fr estão restritos de tal forma que a expressão acima seja positiva.

Seja definida a variável auxiliar

$$A = xQ/gY^2Fr(1-Fr^2)$$ (A

De (A35), (A36) e (A37), consultando uma tabela de Transformadas de Laplace:

$$F_o(t) = \mathcal{L}^{-1}f_o(s) = \exp(-Ht)\left[\frac{AB}{\sqrt{t^2-A^2}}I_1(B\sqrt{t^2-A^2})u(t-A)+\delta(t-A)\right]$$ (A

ônde $\delta(.)$ = função Delta de Dirac

I_1 = função modificada de Bessel da 1ª especie e de 1º ordem

De (A30) e (A33)

$$\mathcal{L}^{-1}(\exp rx) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\exp\left[\frac{1.5xS_o}{Y(1-Fr^2)}\right]\exp(AFrs)f_o(s)\right.$$

$$= \exp\left\{\frac{1.5xS_o}{Y(1-Fr^2)} - \frac{Q}{Y^2}\left[1.5S_o+\frac{g}{C^2}(1-Fr^2)\right](t+AFr)\right\}\cdot$$

$$\left\{\frac{AB}{\sqrt{(t+AFr)^2-A^2}}I_1\left[B\sqrt{(t+AFr)^2-A^2}\right]u(t-A+AFr)\right.$$

$$\left.+\delta(t-A+AFr)\right\} = F_1(t).$$ (A

Agora voltando à equação (A32), verifica-se que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{DF\gamma[1-\exp(-\lambda s)]}{s(\gamma^2 s^2+Gs)}\right\} = F_2(t)u(t) - F_2(t-\lambda)u(t-\lambda)$$

onde

$$F_2(t) = \frac{3S_0\gamma^4C^4}{4gQ^2}\left[\exp\left(\frac{-2gQt}{\gamma^2C^2}\right) - 1 + \frac{2gQt}{\gamma^2C^2}\right]$$

De (A32), (A39) e (A40) e utilizando o teorema da convolução

$$\begin{aligned} q(x,t) = {} & F_2(t)u(t) - F_2(t-\lambda)u(t-\lambda) \\ & - \int_0^t F_2(t-\alpha)u(t-\alpha)F_1(\alpha)\,d\alpha \\ & + \int_0^{t-\lambda} F_2(t-\lambda-\alpha)u(t-\lambda-\alpha)F_1(\alpha)\,d\alpha . \end{aligned}$$

$F_1(t)$ é expresso por (A39) e $F_2(t)$ por (A41).